ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE PARIS 1982

Mathématiques 1re épreuve (4 h)

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels.

La matrice A à n lignes et p colonnes $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ de rang égal à Inf (n,p) est donnée.

Quel que soit $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par I_k la matrice unité d'ordre k.

PARTIE I

1/ On suppose $p < n$ et on désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des matrices G carrées d'ordre n, dites invariantes à gauche de A, satisfaisant à la condition :

(1) $$GA = A$$

a) Montrer que $\Gamma(A)$ est non-vide et est stable pour la multiplication des matrices.

b) Montrer que le sous-ensemble $\Gamma'(A)$ de $\Gamma(A)$ formé par les matrices inversibles de $\Gamma(A)$ a une structure de groupe pour le produit matriciel.

c) Démontrer que toute matrice G élément de $\Gamma(A)$ admet la valeur propre + 1. Déterminer un minorant de la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

2/ On suppose $p > n$; déterminer l'ensemble $\Gamma(A)$ défini comme dans la question 1.

DANS TOUTE LA SUITE DU PROBLEME ON SUPPOSE $p < n$

PARTIE II

Dans cette partie la matrice G élément de $\Gamma(A)$, ainsi que la matrice A, sont décomposées en deux blocs de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \cdots \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad G = \left(G_1 \vdots G_2\right)$$

où A_1 est une matrice carrée d'ordre p, SUPPOSEE INVERSIBLE

A_2 est une matrice à n - p lignes et p colonnes

G_1 est une matrice à n lignes et p colonnes

G_2 est une matrice à n lignes et n - p colonnes.

1/ Exprimer le produit GA en fonction des matrices G_1, G_2, A_1 et A_2.

2/ Montrer que G est parfaitement déterminée par le choix de G_2 et donner une décomposition en deux blocs de G exprimée en fonction de A_1, A_2 et G_2.

3/ On désigne par $\Delta(A)$ l'ensemble des matrices D carrées dites invariantes à droite de A satisfaisant à la condition AD = A. On note ${}^tA$ la transposée de A.

a) Montrer que les ensembles $\Gamma(A)$ et $\Delta({}^tA)$ sont en bijection.

b) montrer que les ensembles $\Delta(A)$ et $\Gamma({}^tA)$ sont égaux.

.../...

PARTIE III

Dans cette partie la matrice A conserve sa décomposition en bloc définie en II, et la matrice A_1 est toujours supposée inversible. Quant à la matrice G, élément de $\Gamma(A)$, on considère sa décomposition en quatre blocs.

$$G = \left(\begin{array}{c:c} G'_1 & G'_2 \\ \hdashline G'_3 & G'_4 \end{array}\right)$$

où G'_1 est une matrice carrée d'ordre p

G'_2 est une matrice à p lignes et n - p colonnes

G'_3 est une matrice à n - p lignes et p colonnes

G'_4 est une matrice carrée d'ordre n - p.

1/ Etablir la relation $G'_1 = I_p - G'_2 A_2 A_1^{-1}$ et donner l'expression de G'_3 en fonction de G'_4, A_1 et A_2.

2/ Soit A^d la matrice à p lignes et n colonnes décomposée en deux blocs de la manière suivante :

$$A^d = \left(\begin{array}{c:c} A^d_1 & A^d_2 \end{array}\right)$$

où A^d_1 est une matrice carrée d'ordre p

A^d_2 est une matrice à p lignes et n - p colonnes .

Exprimer le produit AA^d en fonction de A_1, A_2, A^d_1 et A^d_2.

3/ On dit que la matrice A^d est une inverse à droite de A relative à l'élément invariant G de $\Gamma(A)$ si A, A^d et G satisfont à la relation (2)

(2) $\qquad AA^d = G$

a) Exprimer A^d_1 et A^d_2 en fonction des matrices A_1 , A_2 et G'_2 .

b) Déduire des résultats précédents que G'_2 et G'_4 sont liées par la relation de compatibilité (3) suivante :

(3) $\qquad A_2 A_1^{-1} G'_2 = G'_4$

4/ Soit $\Gamma''(A)$ le sous-ensemble de $\Gamma(A)$ formé des matrices G relativement auxquelles A a un inverse à droite A^d.

a) Démontrer que $\Gamma''(A)$ est inclus dans $\Delta(A^d)$ en déduire que G élément de $\Gamma''(A)$ est idempotent (c'est-à-dire : $G^2 = G$) .

b) Montrer que G élément de $\Gamma''(A)$ est diagonalisable .

5/ Soit G appartenant à $\Gamma''(A)$; on suppose qu'il existe une matrice A^g, inverse à gauche de A relativement à un élément D de $\Delta(A)$, c'est-à-dire vérifiant $A^g A = D$.

Montrer que $A^g = A^d$.

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail